第41講　平面ベクトル(2)

例題41 － 1

$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-3,\ 6)$ のとき，次のベクトルの成分および大きさを求めよ．

(1)　$3\vec{a}-2\vec{b}$　　　(2)　$\vec{a}+t\vec{b}$

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 41 ー 1

$\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(5,\ 1)$ のとき，次のベクトルの成分および大きさを求めよ．

(1)　$-\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$　　(2)　$\vec{a}+t\vec{b}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 41 ー 2

(1)　$\vec{c}=(3,\ 1)$ と平行な単位ベクトルの成分を求めよ.

(2)　2 つのベクトル $\vec{a}=(5,\ 2)$, $\vec{b}=(x,\ 8)$ が平行になるときの x の値を求めよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題41－2

(1)　$\vec{c}=(2,\ -3)$ と同じ向きの単位ベクトルの成分を求めよ．

(2)　2つのベクトル $\vec{a}=(-1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ x)$ について，$2\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ が平行になるときの x の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

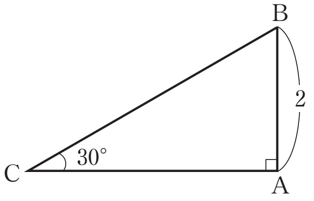
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 41 ー 3

右図のような直角三角形について，次の内積を求めよ．

(1)　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$　　(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(3)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$　　(4)　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CA}$



【Point Pickup】

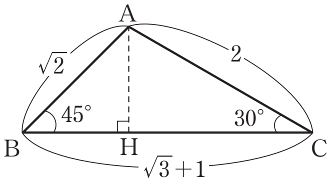
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 41 ー 3

右図のような三角形 ABC において，次の内積を求めよ．

(1) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$　　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}$

(3) $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AH}$　　(4) $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{HC}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 41 ー 4

(1)　次の 2 つのベクトルの内積と，そのなす角 θ を求めよ．

(ア)　$\vec{a}=(-1,\ 5)$，$\vec{b}=(2,\ 3)$　　(イ)　$\vec{a}=(4,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$

(2)　$\vec{a}=(-6,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ x)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるような x の値を求めよ．

また，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるような x の値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題41－4

(1)　2つのベクトル $\vec{a}=(-\sqrt{3},\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ -\sqrt{3})$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ．

(2)　$\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(5,\ 2)$，$\vec{x}=(t-2,\ 4)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{x}$ が垂直になるような t の値を求めよ．また，$\vec{x}+\vec{a}$，$\vec{x}-\vec{b}$ が垂直になるような t の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 41 講　平面ベクトル(2)

(1)　$\vec{a}=(2,\ -3)$，$\vec{b}=(x,\ -1)$ のとき　$3\vec{a}+\vec{b}=(x+$ ア ，$-$ イウ $)$，

$\vec{a}-\vec{b}=(-x+$ エ ，$-$ オ $)$ である．$3\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}-\vec{b}\neq\vec{0}$ より，$3\vec{a}+\vec{b}$ と

$\vec{a}-\vec{b}$ が平行になるのは $x=\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ のときであり，垂直になるときの x の値のうち正

であるものは $x=$ ク である．

(2)　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $60°$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ケ である．

(3)　$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ -3)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ は $\theta=$ コサシ $°$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 41 講　平面ベクトル(2)

例題 41 ー 1

$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-3,\ 6)$ のとき，次のベクトルの成分および大きさを求めよ．

(1)　$3\vec{a}-2\vec{b}$　　(2)　$\vec{a}+t\vec{b}$

(1)　$3\vec{a}-2\vec{b}=3(2,\ 1)-2(-3,\ 6)=(6,\ 3)+(6,\ -12)=\mathbf{(12,\ -9)}$

$|3\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{12^2+(-9)^2}=\sqrt{144+81}=\sqrt{225}=\mathbf{15}$

(2)　$\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ 1)+t(-3,\ 6)=\mathbf{(-3t+2,\ 6t+1)}$

$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(-3t+2)^2+(6t+1)^2}=\mathbf{\sqrt{45t^2+5}}$

類題 41 ー 1

$\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(5,\ 1)$ のとき，次のベクトルの成分および大きさを求めよ．

(1)　$-\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$　　(2)　$\vec{a}+t\vec{b}$

(1)　$-\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}=-\dfrac{3}{2}(1,\ 3)+\dfrac{1}{2}(5,\ 1)=\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{9}{2}\right)+\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{(1,\ -4)}$

$\left|-\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+(-4)^2}=\mathbf{\sqrt{17}}$

(2)　$\vec{a}+t\vec{b}=(1,\ 3)+t(5,\ 1)=\mathbf{(5t+1,\ t+3)}$

$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(5t+1)^2+(t+3)^2}=\mathbf{\sqrt{26t^2+16t+10}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 41 − 2

(1)　$\vec{c}=(3,\ 1)$ と平行な単位ベクトルの成分を求めよ．

(2)　2つのベクトル $\vec{a}=(5,\ 2)$，$\vec{b}=(x,\ 8)$ が平行になるときの x の値を求めよ．

(1)　$|\vec{c}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ より，$\vec{c}$ と平行な単位ベクトルのうち

$\vec{c}$ と同じ向きのものは　$\dfrac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(3,\ 1)=\left(\mathbf{\dfrac{3}{\sqrt{10}}},\ \mathbf{\dfrac{1}{\sqrt{10}}}\right)$

$\vec{c}$ と反対向きのものは　$-\dfrac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}(3,\ 1)=\left(\mathbf{-\dfrac{3}{\sqrt{10}}},\ \mathbf{-\dfrac{1}{\sqrt{10}}}\right)$

(2)　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ より，$\vec{a}\parallel\vec{b}$ となるのは　$\vec{b}=k\vec{a}$　となる実数 k が存在するときである．

$(x,\ 8)=k(5,\ 2)$　より　$x=5k$，$8=2k$

よって　$k=4$　　このとき　$x=\mathbf{20}$

類題 41 − 2

(1)　$\vec{c}=(2,\ -3)$ と同じ向きの単位ベクトルの成分を求めよ．

(2)　2つのベクトル $\vec{a}=(-1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ x)$ について，$2\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ が平行になるときの x の値を求めよ．

(1)　$|\vec{c}|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$ より，$\vec{c}$ と平行な単位ベクトルのうち

$\vec{c}$ と同じ向きのものは　$\dfrac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}(2,\ -3)=\left(\mathbf{\dfrac{2}{\sqrt{13}}},\ \mathbf{-\dfrac{3}{\sqrt{13}}}\right)$

(2)　$2\vec{a}+3\vec{b}=2(-1,\ 2)+3(1,\ x)=(1,\ 3x+4)$

$\vec{a}-2\vec{b}=(-1,\ 2)-2(1,\ x)=(-3,\ -2x+2)$

$2\vec{a}+3\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}-2\vec{b}\neq\vec{0}$ より，$2\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ が平行になるのは

$2\vec{a}+3\vec{b}=k(\vec{a}-2\vec{b})$ となる実数 k が存在するときである．

$(1,\ 3x+4)=k(-3,\ -2x+2)$ より

$1=-3k$　……①，　$3x+4=k(-2x+2)$　……②

①より　$k=-\dfrac{1}{3}$　このとき②より　$3x+4=-\dfrac{1}{3}(-2x+2)$　　よって　$x=\mathbf{-2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

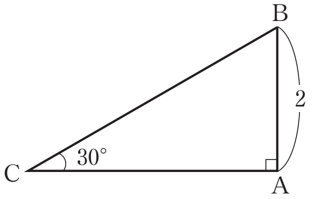
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 41 － 3

右図のような直角三角形について，次の内積を求めよ.

(1) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$　(4) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CA}$



$BC=4,\ CA=2\sqrt{3}$

(1) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cos\angle ACB=2\sqrt{3}\times4\times\cos30^\circ=\mathbf{12}$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=2\times2\sqrt{3}\times\cos90^\circ=\mathbf{0}$

(3) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角は 120°

よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos120^\circ=2\times4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{-4}$

(4) $\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{CA}$ のなす角は 180°

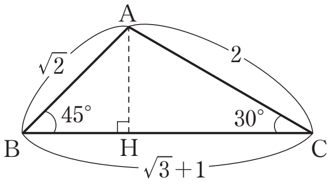
よって　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{CA}|\cos180^\circ=|\overrightarrow{AC}|^2\times(-1)=\mathbf{-12}$

類題 41 － 3

右図のような三角形 ABC において，次の内積を求めよ.

(1) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}$

(3) $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AH}$　(4) $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{HC}$



(1) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AH}|\cos60^\circ=2\times1\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{1}$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{HA}|\cos135^\circ=\sqrt{2}\times1\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\mathbf{-1}$

(3) $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AH}=|\overrightarrow{CH}||\overrightarrow{AH}|\cos90^\circ=\mathbf{0}$

(4) $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{HC}=|\overrightarrow{BH}||\overrightarrow{HC}|\cos0^\circ=1\times\sqrt{3}\times1=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 41 ー 4

(1)　次の2つのベクトルの内積と，そのなす角 θ を求めよ．

　(ア)　$\vec{a}=(-1,\ 5)$，$\vec{b}=(2,\ 3)$　　(イ)　$\vec{a}=(4,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$

(2)　$\vec{a}=(-6,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ x)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるような x の値を求めよ．

また，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるような x の値を求めよ．

(1)　(ア)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\times2+5\times3=\mathbf{13}$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26}$　　$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{13}{\sqrt{26}\sqrt{13}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=\mathbf{45^\circ}$

(イ)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times(-1)+2\times2=\mathbf{0}$　　よって　$|\vec{a}|\neq0$，$|\vec{b}|\neq0$ より　$\theta=\mathbf{90^\circ}$

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるのは　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ のとき

よって　$(-6)\times2+2\times x=0$　より　$x=\mathbf{6}$

$\vec{a}+\vec{b}=(-4,\ 2+x)$　　$\vec{a}-\vec{b}=(-8,\ 2-x)$

$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるのは　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ のとき

よって　$(-4)\times(-8)+(2+x)(2-x)=0$　　$x^2=36$　　よって　$x=\mathbf{\pm6}$

類題 41 ー 4

(1)　2つのベクトル $\vec{a}=(-\sqrt{3},\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ -\sqrt{3})$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ．

(2)　$\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(5,\ 2)$，$\vec{x}=(t-2,\ 4)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{x}$ が垂直になるような t の値を求めよ．また，$\vec{x}+\vec{a}$，$\vec{x}-\vec{b}$ が垂直になるような t の値を求めよ．

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-\sqrt{3})\times1+1\times(-\sqrt{3})=\mathbf{-2\sqrt{3}}$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$　　$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\times2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=\mathbf{150^\circ}$

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{x}$ が垂直になるのは　$\vec{a}\cdot\vec{x}=0$ のとき

よって　$2\times(t-2)+(-1)\times4=0$　より　$t=\mathbf{4}$

$\vec{x}+\vec{a}=(t,\ 3)$　　$\vec{x}-\vec{b}=(t-7,\ 2)$

$\vec{x}+\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直になるのは　$(\vec{x}+\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$ のとき

よって　$t\times(t-7)+3\times2=0$　　$t^2-7t+6=(t-6)(t-1)=0$　　よって　$t=\mathbf{6,\ 1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 41 講　平面ベクトル(2)

(1)　$\vec{a}=(2,\ -3)$, $\vec{b}=(x,\ -1)$ のとき　$3\vec{a}+\vec{b}=(x+$ ア , $-$ イウ $)$,
$\vec{a}-\vec{b}=(-x+$ エ , $-$ オ $)$ である．$3\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}-\vec{b}\neq\vec{0}$ より，$3\vec{a}+\vec{b}$ と
$\vec{a}-\vec{b}$ が平行になるのは $x=\dfrac{カ}{キ}$ のときであり，垂直になるときの x の値のうち正
であるものは $x=$ ク である．

(2)　$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=4$, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ケ である．

(3)　$\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(1,\ -3)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ は $\theta=$ コサシ °である．

解答例

(1)　$3\vec{a}+\vec{b}=3(2,\ -3)+(x,\ -1)=(x+\mathbf{6},\ -\mathbf{10})$

$\vec{a}-\vec{b}=(2,\ -3)-(x,\ -1)=(-x+\mathbf{2},\ -\mathbf{2})$

$3\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}-\vec{b}\neq\vec{0}$ より，$3\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が平行になるのは　$3\vec{a}+\vec{b}=k(\vec{a}-\vec{b})$ となる実数 k が存在するときである．

よって　$(x+6,\ -10)=k(-x+2,\ -2)$ より

$x+6=k(-x+2)$　……①　　$-10=-2k$　……②

②より　$k=5$　　このとき①より　$x+6=5(-x+2)$　　よって　$x=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$ のとき

また，$3\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるのは　$(3\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ が成り立つときである．

よって　$(x+6)(-x+2)+(-10)\cdot(-2)=0$　より　$x^2+4x-32=0$　$x=-8,\ 4$

したがって求める正の数 x は　$x=\mathbf{4}$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=1\times4\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{2}$

(3)　$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$　　$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+2\times(-3)=-5$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=\mathbf{135^\circ}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。